

5.2. Pequenas oscilações para sistemas com equilíbrio dinâmico

Def: um movimento é dito estacionário se, em algum sistema de coordenadas, as coordenadas não-cíclicas são constantes

Ex: partícula no plano sob força central

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \rightarrow \theta \text{ cíclica, } p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{cte}$$

$$\text{eq. Lagrange} \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = m\ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

Se r_0 for tal que $\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r_0} = \frac{p_\theta^2}{mr_0^3}$, então a órbita circular $r(t) \equiv r_0$ ($\dot{r}(t) = 0$) é uma solução p/ a eq. de mov. P. ex, se $V = -\frac{\lambda}{r}$, $\lambda > 0$, então $r_0 = \frac{p_\theta^2}{m\lambda}$

Note que a partícula não está parada: $\dot{\theta}(t) = \frac{p_\theta}{mr^2} = \frac{p_\theta}{mr_0^2} = \text{cte} \rightarrow \theta = \left(\frac{p_\theta}{mr_0^2}\right)t + \theta_0$

Suponha agora que a partícula sofra uma pequena perturbação que modifique ligeiramente os valores de r e $\dot{r}$ a partir dessa órbita de equilíbrio. Assim como no caso estático, podemos nos perguntar se a órbita resultante continuará com r próximo de r_0 ("estável") ou se afastará ("instável").

Observe que a eq. de conservação de energia (válida aqui, já que $\mathcal{L}$ não depende explicitamente de t nem V das velocidades generalizadas) tem a forma

$$E = \underbrace{\frac{m\dot{r}^2}{2}}_{T_{\text{ef}}} + \underbrace{\frac{p_{\theta}^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{\text{ef}}(r)}$$

Vamos assim que, dado um valor fixo p_{θ} , o movimento radial se comporta como o de uma partícula submetida ao potencial efetivo $V_{\text{ef}}(r)$.

Em particular, a condição de equilíbrio vista acima corresponde a $\boxed{\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = 0}$

Mais geralmente, a eq. de movimento radial será obtida a partir da Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = T_{\text{ef}} - V_{\text{ef}} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \left[\frac{p_{\theta}^2}{2mr^2} + V(r) \right]$$

Atenção: note que $\mathcal{L}_{\text{ef}}$ não é obtida substituindo diretamente a condição $\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{mr^2}$ no $\mathcal{L}$ original (o termo em p_{θ}^2 ficaria com o sinal errado). Note que essa condição equivale a impor um vínculo não-holônomo, que como já vimos não podem ser tratados desta forma).

Assim como no caso estático, o equilíbrio em r_0 será estável se $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} > 0$

e nesse caso podemos aproximar $V_{\text{ef}}(r) \approx V_{\text{ef}}(r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} (r-r_0)^2$ qdo $r \approx r_0$

Exemplo Coulombiano/Gravitacional: $V_{\text{ef}} = \frac{p_0^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r}$, e

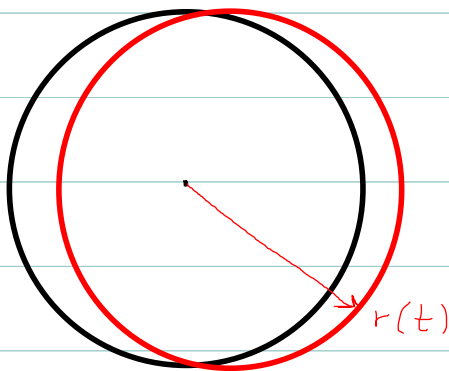
$$k \equiv \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0} = \frac{p_0^2}{2m} \cdot \frac{6}{r_0^4} - \frac{2\lambda}{r_0^3} = \frac{3}{p_0^6} m^3 \lambda^4 - \frac{2m^3 \lambda^4}{p_0^6} = \frac{m^3 \lambda^4}{p_0^6} = \frac{\lambda}{r_0^3} > 0$$

e portanto a órbita é estável, com $r(t) = r_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$, onde

no caso Grav.: $\lambda = GMm$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \stackrel{\uparrow}{=} \sqrt{\frac{GMm}{m r_0^3}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} \text{ e' a freq. angular das pequenas oscilações}$$

Obs: note que, pela 3ª Lei de Kepler, este ω é precisamente igual à freq. angular orbital da órbita circular. Em outras palavras, a análise de pegr. oscilações prevê que a órbita perturbada dará uma "oscilação" em r a cada volta (fig.)



órbita de equilíbrio (circular)

órbita com "pequena oscilação" em r
(aproxima uma elipse)

Note ainda que essa solução da Lagrangeana de pegr. oscilações é uma aproximação da solução exata (a qual, neste exemplo, seria uma elipse). Essa aproximação será melhor quanto menos perturbada for a órbita (quanto menos exêntrica for a elipse).

Pequenas oscilações: sistema multidimensional

Supomos um sistema conservativo descrito em termos de coordenadas generalizadas q_k cuja def. em termos de coords cartesianas $\vec{r}_i$ não depende explicitamente do tempo.

Então (v. ser. 2.6), a energia cinética se escreve $T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$, onde $M_{kl}(q_1, \dots, q_n) = M_{lk} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$ (note que de modo geral M_{kl} depende das coords gen., ex $\frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2]$ etc)

$$\text{e } \mathcal{L} = T - V(q_1, \dots, q_n)$$

Dizemos que uma config $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ está em equilíbrio se $\left(\frac{\partial V}{\partial q_k} \right)_{q^{(0)}} = 0, \forall k$

Expandindo $V(q)$ no redor do ponto de equilíbrio, sendo $q_k = q_k^{(0)} + \eta_k$;

$$V(q) = \underbrace{V(q^{(0)})}_{\text{const. (ignorável)}} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl} \eta_k \eta_l + \dots \quad \left(\begin{array}{l} \text{Termos de 1ª ordem} \\ \text{se anulam} \end{array} \right)$$

$$\text{onde } V_{kl} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l} \right)_{q^{(0)}} = V_{lk}$$

Para o ponto $q^{(0)}$ ser um mínimo (eq. estável), precisamos então

$$\sum_{k,l} V_{kl} \eta_k \eta_l > 0, \forall \eta \neq 0 \quad \left(\text{obs: se } = 0 \text{ p/ } \eta \text{ n' trivial, existirá uma região mínima de dim } > 0 \right)$$

$$\therefore \boxed{\eta}^T \boxed{V} \boxed{\eta} > 0 \quad V \text{ é uma "forma quadrática positiva definida" (como I!)}$$

Para escrever $\mathcal{L}$ até 2ª ordem em $\eta, \dot{\eta}$, precisamos tb expandir T .

Como $\dot{q}_k = \dot{\eta}_k$, então cada termo $M_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l = M_{kl} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_l$ já é no mínimo quadrático em $\dot{\eta}_l$, de modo que só podemos guardar o termo de ordem 0 de M_{kl}

$$T = \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_l, \quad T_{kl} = M_{kl}(q^{(0)}) = T_{lk}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{kl} T_{kl} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_l - V_{kl} \eta_k \eta_l$$

$$\text{Assim: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} = \frac{1}{2} \left[\sum_{l \neq j} (T_{jl} + T_{lj}) \dot{\eta}_l + 2 T_{jj} \dot{\eta}_j \right] = \sum_l T_{jl} \dot{\eta}_l$$

$$\text{e igualmente } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} = - \sum_l V_{jl} \eta_l$$

$$\therefore \text{eq. de Lagrange: } \sum_l T_{jl} \ddot{\eta}_l + V_{jl} \eta_l = 0 \quad j=1, \dots, n$$

interpretação: em torno de um ponto de eq. estável, qualquer sistema mecânico se comporta como um conjunto de osciladores harmônicos acoplados



obs: o somatório em T_{jl} só depende da escolha do sistema de coords; em particular $T_{jl} = \delta_{jl} m_j$ no caso de coords cartesianas